

## Lista pytań egzaminacyjnych do wykładu „Teoria Grup II”

### I. Struktury ogólne

1. Grupy Liego – aksjomatyka, morfizmy, struktura stycznościowa (styczna grupa Liego), przykłady.
2. Cartanowski rachunek różniczkowy na grupie Liego: pola lewo- i prawo-niezmiennicze jako zbiór, przestrzeń liniowa i algebra Liego; obiekty dualne; podstawowe własności transformacyjne wzgl. odwzorowań strukturalnych.
3. Stycznościowa algebra Liego grupy Liego – własności nawiasu Liego, morfizmy algebr Liego, stałe struktury, przykłady; funktorialność Lie.
4. Zupełność pól lewo- i prawo-niezmiennicznych na grupie Liego. Natura ich potoków (w odniesieniu do działań grupowych).
5. Odwzorowanie eksponencjalne na grupie Liego – związek z potokami pól lewo- i prawo-niezmiennicznych, podstawowe właściwości, naturalność.
6. Pochodna logarytmiczna na  $C^\infty(M,G)$ . Forma Maurera-Cartana i jej własności względem operacji binarnej.
7. Twierdzenie Cartana o podgrupie domkniętej.
8. Działanie grupy Liego na rozmaitości różniczkowalnej i indukowane przez nie pola fundamentalne.
9. Kohomologia Chevalleya-Eilenberga algebry Liego – definicja, związek z kohomologią Cartana-Eilenberga odnośnej grupy Liego.
10. Rozszerzenia centralne algebr Liego – definicja, równoważności, opis kohomologiczny, zastosowania fizyczne.
11. Działania rzutowe grup Liego i rozszerzenia centralne grup Liego – definicja, opis kohomologiczny, zastosowania fizyczne i obecna w nich geometryzacja struktur algebraicznych.
12. Elementy struktury algebr Liego – ideały i ich związek z homomorfizmami algebr Liego, ilorazowa algebra Liego, centrum algebry Liego, przykłady ideałów i związane z nimi struktury: algebra pochodna, ciąg pochodny i górny ciąg centralny.
13. Podstawowe operacje na algebrach Liego: suma prosta, kompleksyfikacja (jako funktor), równoważne opisy struktury zespolonej.
14. Podstawowe typy algebr Liego: algebry komutatywne, nieprzywiedlne, proste, rozwiązalne, nilpotentne – definicje, relacje między pojęciami, przykłady.
15. Reprezentacje algebr Liego – definicja, typy ((nie)trywialne, rzeczywiste, zespolone, wierne, przywiedlne, nieprzywiedlne, rozkładalne, unitarne), podprzestrzenie niezmiennicze, splatacze i równoważność reprezentacji, kompleksyfikacja, przykłady, działania.
16. Reprezentacja dołączona grupy Liego na algebrze Liego i te same algebry Liego na sobie.
17. Przywiedlnosc skończenie wymiarowych reprezentacji unitarnych.
18. Reprezentacja pochodna algebry Liego i naturalny warunek jej unitarnosci.
19. Unitaryzowalność skończenie wymiarowych reprezentacji zwartych grup Liego (i algebr Liego) na niezwyrodniałych przestrzeniach unitarnych.
20. Lematy Schura.

## II. Studium półprostych algebr Liego

21. Algebry reduktywne i półproste oraz tych ostatnich zwarte formy rzeczywiste. Własności symetrii działania dołączonego półprostej algebry Liego na sobie.
22. Ideały w półprostych algebrach Liego. Związek między reduktywnymi i półprostymi algebrami Liego.
23. Rozkład półprostej algebry Liego na składniki proste.
24. Podalgebra Cartana półprostej algebry Liego – definicja, istnienie.
25. Pierwiastki, wektory i przestrzenie pierwiastkowe półprostych algebr Liego. Rozkład półprostej algebry Liego zadawany przez ograniczenie jej działania dołączonego na sobie do podalgebry Liego.
26. Podstawowe własności geometrii zbioru pierwiastków: położenie w podalgebrze Cartana, rozpinanie tejże, domkniętość względem brania przeciwności, dopuszczalne krotności skalarnie pierwiastka w zbiorze pierwiastków.
27. Podalgebry  $sl(2; \mathbb{C})$  w półprostej algebrze Liego stowarzyszone z jej pierwiastkami.
28. Wymiar przestrzeni pierwiastkowej.
29. Grupa Weyla – definicja, generatory, własności metryczne, ograniczenie do zbioru pierwiastków, skończoność, liczby Cartana.
30. System pierwiastkowy półprostej algebry Liego – definicja, własności, rząd, morfizmy, (nie)przywiedlność.
31. Zachowanie własności prostoty algebry Liego względem kompleksyfikacji.
32. Prostota a nierozkładalność systemu pierwiastkowego półprostej algebry Liego.
33. Geometria metryczna systemu pierwiastkowego – kąty między pierwiastkami, względne długości, elementarne konsekwencje.
34. Baza systemu pierwiastkowego – definicja, interpretacja geometryczna: związek z elementami nierozkładalnymi wyznaczanymi przez hiperpłaszczyzny bezpierwiastkowe.
35. Komnaty Weyla, fundamentalna komnata Weyla – definicja, geometria, zachowanie względem działania grupy Weyla, związek z bazą systemu pierwiastkowego.
36. Przynależność pierwiastków do baz.
37. Grupa Weyla a rozkład systemu pierwiastkowego na komnaty Weyla – podstawowe własności działania grupy Weyla na zbiorze komnat.
38. Diagramy Dynkina systemu pierwiastkowego – definicja, równoważność, spójność (znaczenie w kontekście różnicowania półprostych algebr Liego).
39. Klasyfikacja nieprzywiedlnych systemów pierwiastkowych i ich klasyczne realizacje algebraiczne.